

1. تعريف الدالة الأسية

الدالة الأسية، و يرمز لها \exp ، هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ الذي يحقق $\exp(0) = 1$
الدالة الأسية معرفة على \mathbb{R} حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp'(x) = \exp(x)$ و $\exp(0) = 1$

2. خواص

- خاصية 1: الدالة الأسية موجبة تماما على \mathbb{R} . (من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(x) > 0$)
- خاصية 2: الدالة الأسية متزايدة تماما على \mathbb{R} . (من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp'(x) > 0$)
- خاصية 3: الدالة الأسية مستمرة على \mathbb{R} . (الدالة \exp قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} كونها حل للمعادلة التفاضلية $y' = y$).

3. مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

4. نتائج

- من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد صحيح n : $[\exp(x)]^n = \exp(nx)$.

5. الترميز

نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(x) = e^x$
إذن الدالة \exp تكون معرفة على \mathbb{R} كما يلي : $\exp(x) = e^x$.

6. استعمال الترميز

باستعمال الترميز e^x ، نكتب : $e^0 = 1$ و $e^1 = e$ (e هو عدد أولر (Euler) حيث $e = 2,718 \dots$)
باستعمال الترميز e^x ، نكتب أيضا :

- من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد صحيح n : $(e^x)^n = e^{nx}$

7. دراسة الدالة \exp

- الدالة \exp معرفة على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(x) = e^x$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- الدالة \exp قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x : $(e^x)' = e^x$.
- الدالة \exp موجبة تماما على \mathbb{R} (أي من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x > 0$).

الدالة \exp متزايدة تماما على \mathbb{R} (من أجل كل عدد حقيقي x : $(e^x)' > 0$).

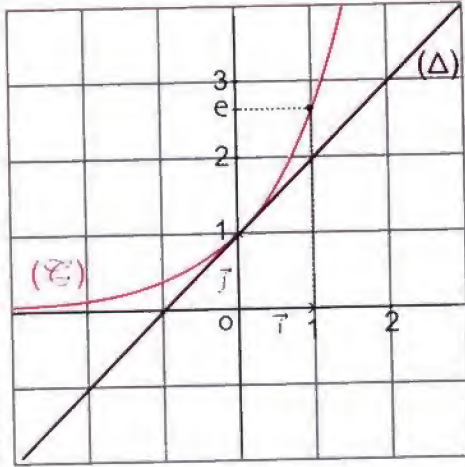
x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp(x)$	0	$+\infty$

الدالة \exp مستمرة على \mathbb{R} .

لأنها قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

جدول التغيرات الدالة \exp يكون كما يلي :

التمثيل البياني



ليكن (\mathcal{E}) المنحنى الممثل للدالة \exp في المستوي

النسب إلى معلم متعامد ومتجانس (\vec{i}, \vec{j}) ، $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (\mathcal{E}) عند النقطة

التي فاصلتها 0 هي : $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$

لدينا $\exp(0) = e^0 = 1$ و $\exp'(0) = e^0 = 1$

إذن $(\Delta) : y = x + 1$

محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{E}) بجوار $-\infty$.

المنحنى (\mathcal{E}) يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب بجوار $+\infty$.

8. اشتقاق الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$

إذا كانت الدالة $x \mapsto u(x)$ قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$

قابلة للاشتقاق على المجال I و من أجل كل عدد حقيقي x ، $[e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$.

9. النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

10. خاصيتان

من أجل كل عددين حقيقيين x و x' : $e^x = e^{x'}$ إذا وفقط إذا كان $x = x'$.

من أجل كل عددين حقيقيين x و x' : $e^x < e^{x'}$ إذا وفقط إذا كان $x < x'$.

ملاحظة : يسمح تطبيق الخاصيتين السابقتين بحل معادلات و متراجحات في \mathbb{R} .

11. المعادلة التفاضلية $y' = y$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = y$ هي الدوال f المعرفة على \mathbb{R}

كما يلي : $f(x) = k e^x$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

تمرين 1

1. احسب العدد $\exp[(0,5)]^2$ بدلالة $\exp(1)$. استنتج قيمة $\exp(0,5)$.
2. عبر بدلالة $\exp(1)$ عن الأعداد التالية : $\exp(-2)$ ؛ $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2})$ ؛ $\frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2}$ ؛ $[\exp(2)]^3$ ؛ $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)}$

حل

1. حساب العدد $[\exp(0,5)]^2$ بدلالة $\exp(1)$.
 لدينا $[\exp(0,5)]^2 = \exp(0,5) \times \exp(0,5)$
 $= \exp(0,5 + 0,5) = \exp(1)$
 إذن $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$
 . استنتاج قيمة $\exp(0,5)$.
 لدينا $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$ و $\exp(1) > 0$ إذن $\exp(0,5) = \sqrt{\exp(1)}$.
2. التعبير عن أعداد بدلالة $\exp(1)$.
 لدينا $\exp(-2) = \exp(0 - 2)$
 $= \frac{\exp(0)}{\exp(2)} = \frac{1}{\exp(2)}$
 ونعلم أن $\exp(2) = \exp(2 \times 1)$
 $= [\exp(1)]^2$
 إذن $\exp(-2) = \frac{1}{[\exp(1)]^2}$ أو أيضا $\exp(-2) = [\exp(1)]^{-2}$
 لدينا $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2}) = \exp(2 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2})$
 $= \exp(3)$
 $= [\exp(1)]^3$
 إذن $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2}) = [\exp(1)]^3$
 لدينا $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)} = \exp(0,5 + x - 1 - x)$
 $= \exp(0,5 - 1)$
 $= \exp(-0,5)$
 $= \frac{1}{\exp(0,5)} = \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$
 إذن $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)} = \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$

$$[\exp(2)]^3 = [\exp(1)^2]^3 \quad \text{لدينا}$$

$$= [\exp(1)]^6$$

$$[\exp(2)]^3 = [\exp(1)]^6 \quad \text{إذن}$$

$$\frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2} = \frac{\exp(3+6)}{\exp(2 \times 4)} = \frac{\exp(9)}{\exp(8)} \quad \text{لدينا}$$

$$= \exp(9-8) = \exp(1) \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2} = \exp(1) \quad \text{إذن}$$

2 استعمال الترميز e^x

تمرين 2

بسط العبارات التالية :

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 ; \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 ; 3e^{2x}(-2e^{-x+1}) ; \frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} ; \frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}}$$

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \times \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) ; \left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) ; e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3$$

حل

$$\frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} = \frac{2e^{2+1}}{e^{\frac{1}{2}}} = 2e^3 \times e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{3-\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{5}{2}} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} = 2e^{\frac{5}{2}} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} = \frac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^{3-1}} = \frac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^2} = 3e^{\frac{1}{2}-2} = 3e^{-\frac{3}{2}} \quad \text{لدينا}$$

$$= 3e^{\frac{1}{2}-2} = 3e^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} = 3e^{-\frac{3}{2}} \quad \text{إذن}$$

$$3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = 3(-2)e^{2x} \times e^{-x+1} = -6e^{2x-x+1} = -6e^{x+1} \quad \text{لدينا}$$

$$3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = -6e^{x+1} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2e^0 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4}$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{إذن}$$

$$e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3 = e^{-10x} \times e^{2(-x+1)} \times e^{3(3x)} = e^{-10x} \times e^{-2x+2} \times e^{9x} \\ = e^{-10x-2x+2+9x} = e^{-3x+2}$$

لدينا .

$$e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3 = e^{-3x+2}$$

إذن

$$\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) = \frac{(e^{4x})^2 - (e^{-4x})^2}{4} = \frac{e^{2(4x)} - e^{2(-4x)}}{4} = \frac{e^{8x} - e^{-8x}}{4} = \frac{e^{8x} - \frac{1}{e^{8x}}}{4}$$

لدينا .

$$\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) = \frac{e^{8x} - \frac{1}{e^{8x}}}{4}$$

إذن

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) = \frac{e^{-x} \times e(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + \frac{1}{e^x})(e^x + 1)}$$

$$= \frac{e^{-x} \times e \times (e^x - 1)}{\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)} = \frac{e^{-x} \times e \times (e^x - 1) \times e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x + 1)}$$

$$= \frac{e^{-x} \times e^x \times e}{e^x + 1} = \frac{e^{-x+x} \times e}{e^x + 1} = \frac{e^0 \times e}{e^x + 1} = \frac{e}{e^x + 1}$$

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) = \frac{e}{e^x + 1}$$

إذن

3 حساب نهايات

تمرين 1

احسب النهاية عند $-\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = (2x - 3)e^x \quad .2 \quad f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 3} \quad .1$$

$$f(x) = \frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \quad .4 \quad f(x) = 3e^{2x} - e^x + 4 \quad .3$$

حل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x - 3}\right) \quad \text{لدينا } .1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 3) = -3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x + 1) = 1 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{3} \quad \text{أي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x - 3}\right) = -\frac{1}{3} \quad \text{و بالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^x = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{بما أن } .2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{و بالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3) e^x = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^{2x} - e^x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x + 4) \quad \text{لدينا } .3$$

$$= 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \quad \text{و بالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{2x} - e^x + 4) = 4 \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \right) && \text{لدينا 4} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) &= 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \times e) = 0 && \text{لدينا} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \right) &= \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e} && \text{إذن} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \sqrt{e} && \text{و بالتالي} \end{aligned}$$

تمرين 2

احسب النهاية عند $+\infty$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x \quad .2 \quad f(x) = e^{2x} - x^2 \quad .1$$

$$f(x) = e^{3x+1} - 3x \quad .4 \quad f(x) = (3x^2 - 1)e^x \quad .3$$

حل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^{2x}}{x^2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(\frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] \quad \text{لدينا 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و بالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(\frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) \quad \text{لدينا 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x) = +\infty \quad \text{و بالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ينتج أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 1)e^x = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 1) = +\infty \quad \text{لدينا 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و بالتالي}$$

$$e^{3x+1} - 3x = e^{3x} \times e - 3x = 3x \left(e \frac{e^{3x}}{3x} - 1 \right) \quad \text{لدينا 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e \frac{e^{3x}}{3x} - 1 \right) = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x+1} - 3x) = +\infty \quad \text{و بالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x \left(\frac{e^{3x}}{3x} - 1 \right) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ينتج أن}$$

4 تعيين دوال مشتقة

تمرين

عين المجموعة التي تقبل عليها الدالة f الإشتقاق ثم عين الدالة المشتقة f' في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^x + x^2 \quad .1 \\ f(x) &= \frac{e^x + 1}{x} \quad .2 \\ f(x) &= (2x - 3)e^{3x-1} \quad .3 \\ f(x) &= \frac{e^{2x}}{2x-1} \quad .4 \end{aligned}$$

حل

$$f(x) = x e^x + x^2 \quad .1$$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + x e^x + 2x \quad ; \quad x \text{ من أجل كل عدد حقيقي} \\ &= (x + 1) e^x + 2x \end{aligned}$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = (x + 1) e^x + 2x$

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{x} \quad .2$$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ وقابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x) - (e^x + 1)}{x^2} \quad ; \quad x \text{ غير منعدم} \\ &= \frac{(x - 1) e^x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{(x - 1) e^x - 1}{x^2} \quad ; \quad x \text{ غير منعدم}$$

$$f(x) = (2x - 3)e^{3x-1} \quad .3$$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{3x-1} + (2x - 3) \times 3e^{3x-1} \quad ; \quad x \text{ من أجل كل عدد حقيقي} \\ &= (2 + 6x - 9)e^{3x-1} = (6x - 7)e^{3x-1} \end{aligned}$$

$$f'(x) = (6x - 7)e^{3x-1} \quad ; \quad x \text{ من أجل كل عدد حقيقي}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2x-1} \quad .4$$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ وقابلة للاشتقاق على كل من المجالين $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ و $]-\infty; \frac{1}{2}[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x}(2x-1) - 2e^{2x}}{(2x-1)^2} \quad ; \quad \frac{1}{2} \text{ مختلف عن} \\ &= \frac{4(x-1)e^{2x}}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{4(x-1)e^{2x}}{(2x-1)^2} \quad ; \quad \frac{1}{2} \text{ مختلف عن}$$

تمرين 1

حل في \mathbb{R} كل معادلة من المعادلات التالية :

$$e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0 \quad ; \quad 3e^{2x} - e^x - 1 = 0 \quad ; \quad e^{x^2} = e \quad ; \quad e^{2x} - e^x = 0 \quad ; \quad e^{3x} = 1$$

حل

1. حل المعادلة $e^{3x} = 1$

لدينا $e^{3x} = 1$ يعني $e^{3x} = e^0$ أي $3x = 0$

وبالتالي $x = 0$. ينتج أن المعادلة $e^{3x} = 1$ تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} وهو 0.

2. حل المعادلة $e^{2x} - e^x = 0$

لدينا $e^{2x} - e^x = 0$ يعني $e^{2x} = e^x$ أي $2x = x$ وبالتالي $x = 0$.

ينتج أن المعادلة $e^{2x} - e^x = 0$ تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} وهو 0.

3. حل المعادلة $e^{x^2} = e$

لدينا $e^{x^2} = e$ يعني $x^2 = 1$ أي $(x-1)(x+1) = 0$. وبالتالي $x = 1$ و $x = -1$.

ينتج أن المعادلة $e^{2x} = e$ تقبل حلين مختلفين في \mathbb{R} هما 1 و -1.

4. حل المعادلة $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$... (1) نضع $e^x = x$

$$\begin{cases} 3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0 \\ e^x = x \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \\ e^x = x \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} (3x+1)(x-1) = 0 \\ e^x = x \end{cases}$$

إذن ($x = 1$ أو $x = -\frac{1}{3}$) و $e^x = x$. ينتج أن $e^x = 1$ أو $e^x = -\frac{1}{3}$.

لدينا $e^x = 1$ إذن $x = 0$.

المعادلة $e^x = -\frac{1}{3}$ لا تقبل حلا في \mathbb{R} (لأن من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$)

وبالتالي $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} وهو 0.

5. حل المعادلة $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$

لدينا $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$ يعني $e^{4+x^2} = e^{-4x}$ أي $4 + x^2 = -4x$

أي $x^2 + 4x + 4 = 0$ أي $(x+2)^2 = 0$ إذن $x = -2$.

ينتج أن المعادلة $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$ تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} وهو -2.

تمرين 2

حل في \mathbb{R} كل متراجحة من المتراجحات التالية :

$$e^{x^2} e^x < (e^2)^3 \quad ; \quad e^{1+x^2} \leq e^{2x} \quad ; \quad e^{-2x} \geq 1$$

حل

1. حل المتراجحة $e^{-2x} \geq 1$ في \mathbb{R} .

لدينا $e^{-2x} \geq 1$ يعني $e^{-2x} \geq e^0$ أي $-2x \geq 0$ إذن $x \leq 0$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $e^{-2x} \geq 1$ هي $]-\infty; 0]$.

2. حل المتراجحة $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ في \mathbb{R} .

لدينا $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ يعني $1+x^2 \leq 2x$ أي $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ أي $(x-1)^2 \leq 0$

إذن $x = 1$.

إذن المتراجحة $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$ تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} هو 1.

3. حل المتراجحة $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$ في \mathbb{R} .

لدينا $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$ يعني $e^{x^2+x} < e^6$ أي $x^2 + x < 6$ أي $x^2 + x - 6 < 0$.

لدينا $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

إذن $x^2 + x - 6 < 0$ يعني $(x-2)(x+3) < 0$

و بالتالي $x \in]-3; 2[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$ هي $]-3; 2[$.

- f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = x - 2 - e^{-x}$
- (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 2. استنتج أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$.
 - حدد الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{C}) و المستقيم (Δ).
 3. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = e^{-x}(xe^x - 1) - 2$
 - استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - ادرس سلوك المنحنى (\mathcal{C}) الفروع اللانهائية للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $-\infty$.
 4. ادرس تغيرات الدالة f .
 5. اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.
 6. ارسم المنحنى (\mathcal{C}).
 7. احسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = 3$ و $x = \lambda$: $\lambda > 3$.
 - ما هي نهاية $A(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$ ؟

حل

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- الدالة f معرفة على \mathbb{R} . لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$. إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. استنتج أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مستقيما مقاربا (Δ).
- لدينا $f(x) = ax + b + \phi(x)$ حيث $a = 1$ ، $b = -2$ ، و $\phi(x) = e^{-x}$.
- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ فإن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ هو المستقيم المقارب للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $+\infty$.
3. من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}(xe^x - 1) - 2 = xe^{-x}e^x - e^{-x} - 2$
 $= x - 2 - e^{-x} = f(x)$
- إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = e^{-x}(xe^x - 1) - 2$
- لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(xe^x - 1) - 2 = -\infty$
- ينتج أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (\mathcal{C}).
- لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$

تمارين و حلول نموذجية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{إذن}$$

ينتج أن المنحنى (\mathcal{C}) يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $-\infty$.

4. دراسة تغيرات الدالة f .

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + e^{-x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x} > 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) > 0$.

ينتج أن الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R} .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5. إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.

الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2; 3]$.

لدينا $f(2) = -\frac{1}{e^2}$: أي $f(2) < 0$

و $f(3) = 1 - \frac{1}{e^3}$: أي $f(3) > 0$

وبالتالي $f(2) \cdot f(3) < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2 < x_0 < 3$.

6. رسم المنحنى (\mathcal{C}) .

7. حساب المساحة $A(\lambda)$.

لدينا $A(\lambda) = \int_3^\lambda [(x-2) - f(x)] dx$

$$= \int_3^\lambda e^{-x} dx$$

الدالة $x \mapsto -e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto e^{-x}$ على المجال $[3; \lambda]$ حيث $\lambda > 3$.

$$A(\lambda) = [-e^{-x}]_3^\lambda \quad \text{ينتج أن}$$

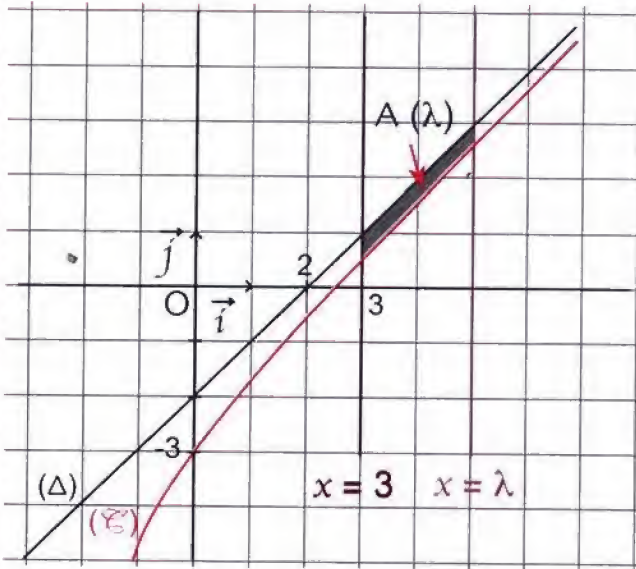
$$= -e^{-\lambda} + e^{-3}$$

و بالتالي $A(\lambda) = -e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3}$ (وحدة المساحات).

حساب نهاية $A(\lambda)$ لماؤول λ إلى $+\infty$.

لدينا $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(-e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3} \right) = \frac{1}{e^3}$ لأن $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0$

و بالتالي $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{e^3}$.



تمارين و مسائل

إستعمال الترميز e^x

1 بسط العبارات التالية :

$$(e^{3x})^2 : e^{1-x} e^{3x+3} : e^x e^{-2x} : e^{2x} e^{3x}$$

$$\frac{e^{-0.2}}{e^{0.2}} : \frac{e^5}{e^2} : e^{\frac{1}{2}} e^{-2} : (e^x)^{-2}$$

2 عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل

$$\frac{e^x + 1}{2e^x + 1} = a + \frac{be^x}{2e^x + 1} : x \text{ كل عدد حقيقي}$$

3 عين الأعداد الحقيقية a , b و c بحيث من

$$\text{أجل كل عدد حقيقي } x, \frac{e^{2x}}{e^x + 4} = ae^x + b + \frac{ce^x}{e^x + 4}$$

حساب نهايات

4 عين النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) : \lim_{x \geq 0} x e^{\frac{1}{x}} : \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1}$$

$$\lim_{x \geq 0} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x : \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe + 3 - 5e^x)$$

تعيين دوال مشتقة

5 في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة

تعريف الدالة f و دالتها المشتقة f' .

$$f(x) = e^{3x+1} : f(x) = 2e^x$$

$$f(x) = e^{\sin 2x} : f(x) = e^{3-x}$$

$$f(x) = (3x+1)e^x : f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} : f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$$

$$f(x) = e^x \sin x : f(x) = \frac{5e^x - 1}{1 - e^x}$$

$$f(x) = e^{-x} (\cos 3x - \sin 3x)$$

حل معادلات و متراجحات

6 حل في \mathbb{R} كلا من المعادلات التالية :

$$e^{5x-1} = e^{x^2+5} : e^{x^2} = e^{25} : e^x = 1$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 : e^x + 1 = \frac{2}{e^x} : e^{\sin x} = e^{\cos x}$$

$$e^x + e^{-x} = 2 : e^{4x} - e^{2x} = 0$$

$$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0 : e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$$

7 حل في \mathbb{R} كلا من المتراجحات التالية :

$$e^{2x} - e^x < 0 : e^{x^2-2} \leq e^{4-x} : e^x \geq \sqrt{e}$$

$$e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0 : e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$$

$$e^{2x} > e^{x+1} : e^{x^2} x e^x < (e^3)^2$$

حساب دوال أصلية

8 في كل حالة من الحالات التالية، عين دالة

أصلية للدالة f على المجال I .

$$I = \mathbb{R} : f(x) = e^{-x}$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2} e^{3x} - 5e^{2x}$$

$$I = [0 ; +\infty[: f(x) = x e^{x^2}$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 3)^2}$$

9 عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون

الدالة F المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$F(x) = (a \sin x + b \cos x) e^x$$

دالة أصلية للدالة f

$$f(x) = (5 \sin x - \cos x) e^x \text{ حيث}$$

مسائل

10 f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

1. حل المعادلة $f(x) = 0$ في \mathbb{R} .

2. عين النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

3. ادرس تغيرات الدالة f .

4. ارسم المنحنى (\mathcal{C}) الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

5. حل بيانيا المعادلة $f(x) = k$ حيث k

عدد حقيقي.

تارين و مسائل

7. نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - f(x)$$

(أ) . حلل العبارة $e^{2x} - 2e^x + 1$

(ب) . احسب $g'(x)$ و $g(0)$. ادرس تغيرات g .

(ج) . استنتج الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{C}) و المماس (T) .

8. ارسم (T) و (\mathcal{C}) .

13 (I_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

1. احسب I₁ .

2. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

3. احسب I₂ و I₃ .

14 f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ و } \lambda \text{ عدد حقيقي موجب تماما.}$$

1. ادرس تغيرات الدالة f .

2. ارسم المنحنى (\mathcal{C}) الممثل للدالة f في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الوحدة 4 cm .

3. باستعمال المكاملة بالتجربة، احسب المساحة

$A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C})

و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = \lambda \text{ و } x = 0 \text{ على الترتيب.}$$

ادرس نهاية $A(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

15 1. نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}

$$g(x) = e^x - x - 1 \text{ كما يلي :}$$

- ادرس تغيرات الدالة g .

- احسب $g(0)$.

2. استنتج أن العبارة $\frac{e^x}{e^x - x}$ موجبة من أجل

كل عدد حقيقي x .

6. λ عدد حقيقي موجب تماما .

أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود

بالمنحنى (\mathcal{C}) و محور الفواصل و المستقيمين ذوي

المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 0$ حيث $\lambda > 0$.

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

11 نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = 2e^{2x} + e^x - 3$$

ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تحقق من صحة المعلومات الواردة في الجدول

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-3	0	$+\infty$

التالي :

(نظم المعلومات المقدمة وفق ترتيب منطقي).

2. عيّن معادلة للمماس (T) للمنحنى عند النقطة

ذات الفاصلة 0 .

3. ادرس إشارة العبارة $f(x) - 5x$ على \mathbb{R} .

استنتج الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{C}) و المماس (T) .

12 نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

و (\mathcal{C}) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة f .

2. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

4. أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R} .

5. بيّن أن النقطة $A(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر (\mathcal{C}) .

6. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (\mathcal{C}) عند

النقطة A .

6. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

7. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T).

8. ارسم المماس (T) والمنحنى (C).

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 1 cm.

لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f(x) = (2 + \cos x) e^{1-x}$

و (C) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

1. عين مجموعة تعريف f .

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) > 0$

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$$

استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$2 + \cos x + \sin x > 0$$

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$$

استنتج نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

5. أثبت أن الدالة f متناقصة تماما على \mathbb{R} .

أنجز جدول تغيرات الدالة f .

6. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

7. بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا واحدا α

حيث $0 < \alpha < \pi$.

8. ارسم المنحنى (C).

3. نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$$

- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) > 0$

- احسب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$$

استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5. ادرس تغيرات الدالة f .

6. (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

- ارسم (C) في المعلم السابق.

16 نعتبر الدالة العددية f المعرفة

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الوحدة 1 cm.

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .

2. ادرس تغيرات الدالة f .

3. بين أن $f(x)$ يكتب على الشكل

$$f(x) = a + \frac{b}{e^x + 1}$$

يطلب تعيينهما.

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

و استنتج أن الدالة f فردية.

5. أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف.